

# 量子力學的波函數與康德的物自體

王守益<sup>1</sup> 王慧琴<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 國立新竹清華大學物理系退休，新竹，台灣

<sup>2</sup> Nobel Education Institute, Arcadia, California, USA

自從 1770 年康德提出物自體的存在以來，這物自體的觀念，一直是一個謎。在這 21 世紀的開頭時期，我們想進一步知道它究竟是什麼。我們首先舉列出康德物自體的七種特質，然後提出近代物理的量子力學的波函數  $\Psi$ ，發現波函數  $\Psi$  也具有這七種特徵，而且它是可以用數學式子計算求得。我們更在方程式  $P = \int \Psi^* \hat{P} \Psi d\tau$  中發現本體性的  $\Psi$ 、現象界的物理性質  $P$ 、與對應於  $P$  的算子  $\hat{P}$ ，都是定義得很清楚的，而且由此方程式相互聯結。簡言之，方程式  $P = \int \Psi^* \hat{P} \Psi d\tau$  明顯地闡釋了一物體的本體(性)與現象(相)的區別與關係。對於複數函數波函數的不可觀測性，我們也做了詳細的論述。

我們的結論是：在量子力學的範疇裡，已經找到了康德物自體的一種明確而具體的數學形式，即複數函數的波函數。由於物自體是不可測、不可知的量，波函數的複數性質恰好是最適當的。幾百年哲學上的物自體之謎，似乎已經得到解決了。(佛學與科學 2000;1:26-30)

關鍵詞：物自體；本體；本體論；哲學；康德；波函數

## 一、引言

一件物體，例如說一個放在桌上的杯子，會呈現出它的形相，這是大家都有的共識。但是這個相是真實的存在嗎？佛家的〈金剛經〉說：「凡所有相皆是虛妄」；〈楞嚴經〉也說宇宙萬物都是「唯心所現」的存在，不是真實性的存在。關於這一點，我們曾應用物理學的「幾何光學」證明物體的形相的確是虛妄不實，而且是隨著觀測者的不同，而有不同的觀測結果。<sup>1</sup> 西方的哲學家們也有很多人持著這樣的看法，典型的著名人物如像柏克萊(Bishop George Berkeley, 1685-1753)，認為存在只是一種認知(To be is to be perceived)，存在只是一種觀念，所以他是所謂觀念主義(Idealism)者。<sup>2</sup>

現在我們要進一步考慮的是：這個杯子為什麼不是一個蘋果？是不是杯子有杯子的「本

質」，「本體」或「本性」？為了簡化問題，這裡我們不考慮納入觀測者可能引發的問題。另一點要說明的是：我們用不同觀測方法去觀測它，所得到的都只是不同觀測方法下的觀測結果，也都只是它的「性質」，不是它的「本質」。<sup>3</sup> 那麼它有沒有本質呢？這個答案大約在三百年前德國哲學家康德(Immanuel Kant, 1724-1804)已作了肯定的答覆，他確定任何物體都有它的「物自體」(Thing-in-itself)的存在。但是，這物自體是不可知的，不能被觀測得到的。他認為「物自體」是一種「超越體」。<sup>4</sup> 這樣說來「物自體」仍然不知道是甚麼。它形成了三百年來一個哲學上的謎。本文的主旨就是想解除這個謎，也藉此提供讀者們對物體本體的一種新的看法。筆者們在提出這種新看法之前，按順序應當先將康德大師「物自體」的特性陳述於下。

聯絡人：王守益，彰化市工校街 64 號 5 樓

## 二、物自體的特性

一物的物自體或稱超越體(transcendental object)，是對該物所有可能的認知經驗的原因或根源。<sup>4</sup>它是該物的本質或本體(noumenon)，而不是現象或形相(phenomenon)，而且不能由感覺得到，或由直覺體察得出來的。因此康德的哲學常被稱為「超越性」觀念主義(transcendental idealism)，以區別上述柏克萊的極端式觀念主義。羅素(Berstrand Russell，1872-1970)對於康德物自體的特性有一簡明的陳述，他說：「各個物自體都是人們所能感知的原因或根源，但不是可以被知曉的；它們不存在於時間和空間裡面，它們不是物質，也不能被任何康德稱為「類別」(categories)的那些觀念所描敘」。<sup>5</sup>基於上述物自體的特性可以分條列舉如下：

- (1) 人們感知物自體的原因。
- (2) 不可被知曉的。
- (3) 不存在於時間或空間裡面。
- (4) 不是物質。
- (5) 不能為康德稱為「類別」的那些觀念所描述。
- (6) 是本質或本體，不是現象。
- (7) 不能被感知，也不能由直覺體察得出來。

以上這些特性，筆者們在下面將提出量子力學的波函數與之比較，現在先陳述這種波函數的相關性質。

## 三、量子力學的波函數

我們來考慮杯子裡的「水」作為說明波函數的例子吧！從宏觀的尺度看，這杯中的水是液體。當然我們都知道，它的微觀物質是H<sub>2</sub>O的水分子；而且水分子的各種性質是可以由適當的科學儀器觀測得到的。如上所述，這些觀測到的只是H<sub>2</sub>O的性質，並非它的「本身」。<sup>3</sup>那麼究竟甚麼是它的「本身」呢？我們認為近代物理學的量子力學(Quantum Mechanics)已經對「本身」提供了答案，那就是量子力學的波函數(Wave function)，人們常常用符號Ψ來代表它。<sup>6</sup>對於我們舉例的H<sub>2</sub>O水分子，典型的寫法是Ψ<sub>H<sub>2</sub>O</sub>，而Ψ<sub>H<sub>2</sub>O</sub>的詳細表達式是相當複雜的，雖然複雜，但仍可計算出來，或者在文獻中查出來。在現在這高速電腦時代，像H<sub>2</sub>O這

樣的三個粒子系統的波函數，應該很容易把它計算出來的。對於其他遠為複雜的物理系統，其波函數都必然存在，而且在理論上都可以計算得到。我們認為一物體的波函數可以被視為是它的物自體的理由是，Ψ具有下列兩大特徵或條件：<sup>7</sup>

- (1) 一物理系統的波函數Ψ足以完全描述這系統。
- (2) 此系統的所有物理性質都可以從它的波函數Ψ推導出來。

波函數Ψ的這兩個強勢條件，足夠使它作為一個物理系統的代表者。這不單是對H<sub>2</sub>O如此，對任何其他物質系統都如此。值得特別注意的是，上述第(2)個特徵可用數學式子表達如下：

$$P = \int \Psi^* \hat{P} \Psi d\tau \quad (1)$$

其中P、Ψ\*、 $\hat{P}$ 與dτ分別表示待觀測的物理性質、Ψ的複數共軛函數（從Ψ推導出來）、對應於性質P的算子、積分式中微分體積。<sup>6</sup>波函數Ψ的一重要性質是：任何系統的Ψ必然是數學上的複數函數，即含有 $\sqrt{-1}$ 的數。<sup>7</sup>因此，Ψ是不可以被觀測或量度的（詳見下面第五節）。在上式(1)中的左端，是需要觀測的某種物理性質，稱這性質為P，P必然是屬於數學上的實數範疇。相反的，式中右端的Ψ\*與Ψ二者都必然是複數，這是量子力學的特性。再看算子 $\hat{P}$ ， $\hat{P}$ 可以在實數或複數範疇。舉個實際例子吧：假設左端要觀測的物理性質P是一個粒子的動量mv，m是粒子的質量，v是它的速度。那末與這性質P相應的算子 $\hat{P}$ 是 $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ 。其中 $i = \sqrt{-1}$ 是虛數， $\hbar$ 是蒲蘭克常數除以 $2\pi$ ， $\frac{\partial}{\partial x}$ 是微分算子。<sup>6</sup>使人最感興趣的是，在(1)式右端的Ψ\*、Ψ、 $\hat{P}$ 都是定義得清清楚楚的複數函數，而左端的性質P卻永遠都是實數，而且P是可以觀測的。這個事實是量子力學在建構上可以證明的。

從(1)式可看出的另一重要觀念，是本質(或本體)與性質(或現象)的明確關係。一物體的本質(或本體)是由Ψ來表達，它的性質(或現象)是用P來代表。P與Ψ的關係是由(1)式來確定。因此，我們所能觀測的是P，並非它的本體Ψ，而且沒有Ψ也生不出P來，這正是現

象與本體的關係。任一物理系統的  $\Psi$ ，雖然在理論上可以得到數學公式或數字解，仍不能作實驗上的觀測；實際原因是  $\Psi$  是複數函數，是不可能觀測的數，這在下面第五節有詳細的論述。這個不可觀測的性質，正好是物自體的特徵。<sup>4</sup>

#### 四、康德物自體與波函數的比較

爲了能夠將康德的物自體與量子力學的波函數作簡單而直接的比較研究，我們回憶第二節所述物自體的那七種特性。在下面，我們以同樣的方式把波函數的特性對應地舉列出來。

- (1)  $\Psi$  代表某一物體的本身，是構成人們對該物體感覺及認知的原因。
- (2)  $\Psi$  是不可知的，因爲  $\Psi$  是複數函數，不可測量也不可能被觀察。
- (3)  $\Psi$  不是存在於空間或時間裡，因爲  $\Psi$  是複數函數，不佔據空間或時間。
- (4)  $\Psi$  不是物質，因爲  $\Psi$  是複數函數，不是物件，不具質性。
- (5)  $\Psi$  不能爲康德稱爲「類別」的那些觀念所描敘。

要說明這一點，我們先要陳述甚麼是康德所說的「類別」。他說的十二種類別是從三段論法(Syllogism)的形式推導出來的先驗(a priori)型觀念。這十二類別可分爲四組：[1]屬於數量的，如單一、多數、總數；[2]屬於定性的，如真實、否定、限制；[3]屬於關係的，如本質與偶然因素、因與果、相互性；[4]屬於程式性的，如可能性、存在性、必要性。因爲  $\Psi$  是一複數函數，應不爲這些實際生活上的十二類觀念所描述。

- (6)  $\Psi$  是可以被視爲一物體的本體而非其現象，因爲  $\Psi$  能完全描述該物的系統而又不能被測知。
- (7)  $\Psi$  是不能用感官感覺，也不能用直覺察覺，因  $\Psi$  是複數函數。

除上述七項與物自體相合外，如前方程式(1)所述， $\Psi$  可以給出一物體的所有物理性質。當然更有價值的是：我們可以用薛丁格方程式(Schrödinger Equation)把  $\Psi$  解出來。<sup>6</sup> 因此， $\Psi$  可以被界定認爲康德物自體的一種形式，而

物自體的謎已然揭曉了。

#### 五、複數函數的波函數 $\Psi$ 不能被觀測的道理

波函數 不能被觀測，也不能爲感官感覺與四之(5)中所述十二類別的觀念等所描述的理由，筆者現以下面三個不同方式來作說明：

##### 1. 從「論述依據」來作詳細說明<sup>6</sup>

###### A. 現引一量子力學書的原文如下：

The reason is that a complex quantity cannot be measured by any actual physical instrument. The "real" world (using the term in its nonmathematical sense) is the world of "real" quantities (using the term in its mathematical sense).

這段文意是說，一個複數的量是不可能用實際物理儀器來測量的。該段特別提出：人們生活的真實(real)世界(這個 real 不是指數學上的實數 real number)是實數(real)的世界(這個 real 是指數學上的實數)。

###### B. 人們用感官感覺所觀測的量，如用目測一物長度，或觀其顏色，常需用直尺或照相機，以增進其精確度及延展性的功能。故物理儀器是感官感覺功能的延展或精密化的成果。

###### C. 十二類別的觀念也是人們生活經驗所發展出的實際東西(十二類別的觀念談的「數」只是單一、多數、總數等的自然數。沒有負數、無理數，更沒有虛數或複數。)所以十二類別的觀念是屬於實數的範疇。這正是上面英文所說的含義。人們所生活的既是實數的世界，自然就無法觀測複數函數了。

##### 2. 從「低次元不能觀測高次元」來說明

考慮一粒子作圓周運動，它的運動軌跡可寫爲：

$$r^2 = x^2 + y^2 = a^2$$

其中  $r$  爲圓周半徑， $r=a$  爲常數。粒子的運動軌跡投影到  $x$  軸， $y$  軸上的投影分別是：

$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \sin \omega t,$$

其中  $\omega t$  是角速度， $t$  是運動時間。

一度空間(一次元)的觀測者，如  $x$  軸上的觀測者，只看到  $x = a \cos \omega t$  的簡諧運動，即觀測到粒子在  $x$  軸上作來回「直線」運動。在  $y$  軸上的觀測者看到的也是來回「直線」運動，他們都看不到二次元的真實「圓周」運動。

同樣地，複數是包含「實數」與「虛數」的高次元世界。在「實數」的低次元世界裡是觀測不到「複數」的高次元世界的。

如果不用直角座標  $(x, y)$  而用極座標  $(r, \theta)$  其結果仍同，因為直角座標  $(x, y)$  與極座標  $(r, \theta)$  有一一對應的等同關係。

### 3. 從最簡單的 $\Psi = ae^{i\omega t}$ 來作實際說明

$\Psi$  的最簡單形式可以是  $\Psi = ae^{i\omega t}$ ，可寫為：

$$\Psi = z = ae^{i\omega t} = a \cos \omega t + ia \sin \omega t$$

$$z = x + iy$$

$z$  是最簡單的複數函數。這和上面的圓周運動很相似，只是把  $y$  變成  $iy$ ，即將  $y$  軸從「實數」軸變成了「虛數」軸， $x$  軸仍是「實數」軸。這一改變之下，原來「低次元不能觀測高次元」的限制仍然存在。尤有甚者，「虛數」軸  $iy$  的「虛數空間」實難想像，更不用說觀測了。這是因為「虛數」是人們沒有生活經驗的世界，例如我們生活經驗裡的「5 個 5」，即 5 的自乘(平方)是 25，是(實數的)正數，怎樣也得不到負數來。即使是負數，如 -5 的自乘也是 25，也是正數。我們怎樣也沒碰到一個數，它自乘後會變為負數的。感官能感覺的都是生活經驗的範疇。十二類觀念也是屬於生活經驗的範疇。因此它們都不能拿來描述含有「虛數」的  $\Psi$ 。

這裡再補充說明一點，如果把  $\Psi$  寫成幅度(amplitude)  $|\Psi|$  與相位(phase)  $\theta$  來討論，其結果也是一樣，例如上述的  $\Psi$  可寫為：

$$\Psi = |\Psi| \cdot e^{i\theta}$$

即使你觀測到幅度  $|\Psi|$ ，也觀測到相位  $\theta$ ，這些也只是  $\Psi$  分別投影到幅度與相位上的結果，並不是  $\Psi$  的整體。即如上一小節中所述，

把「實數部分」與「虛數部分」都當作「實數」來觀測，那末，在「實數」的低次元世界裡是觀測不到「複數」的高次元世界的整體了。

很明顯的是，我們只用  $|\Psi|$  和  $\theta$ ，即是把上式中的虛數  $i$  拿掉不管了，也就是把  $\Psi$  的複數本質拿掉了。假如把  $\Psi$  的複數本質納入考慮

$$\Psi = |\Psi| \cos \omega t + i|\Psi| \sin \omega t$$

我們無法想像實數軸  $x$  與虛數軸  $iy$  怎樣能畫出圖來或相加起來。因此雖然  $\Psi$  的幅度與相位可以分別測知， $\Psi$  的複數本質仍不能測知。

## 六、結論

康德的物自體觀念的確是很難了解，即使在約 1770 年，當他晉升為邏輯學與形而上學的教授職位提出論文時，對於物自體的真實性質，他自己也還沒有充分了悟。<sup>8</sup>

我們在第二節裡舉列出了七項物自體的特性。主要特性是：它是不可被知的，不能用感官感覺到的，也不能用直覺察知的，但它是該物體的主體或本質。

20 世紀初期所發展出的量子力量的波函數  $\Psi$  具有二大重要特性，其中第(2)特性包含了方程式(1)，我們在第四節裡將  $\Psi$  與物自體作一對應比較，發現  $\Psi$  不獨符合物自體所具有的七項性質，而且  $\Psi$  可以用數學計數得出。

特別要提出說明的是：一物體的本體  $\Psi$  是不能觀測的複數，這在第五節裡有詳細的論述。反之，它的物理性質  $P$  是能觀測的實數；更有興趣的是，方程式(1)明確地給出了本體  $\Psi$  與現象  $P$  的數學關係。

在這裡也要申明一點：物體的本體  $\Psi$  是因為量子力學是以研究現象為主旨的物理學，對於物體的本體問題通常是不作甚麼報導的。儘管如此， $\Psi$  作為一物的本體的角色總是存在著，也在本文中顯現了出來。

總結的說，我們認為在量子力學的範疇裡，已經找到了康德大師物自體的一種數學形式，即是含有虛數  $i = \sqrt{-1}$  的波函數。物自體既然是不可觀測得到的東西，似乎這種複數函數  $\Psi$  的形式是最適合，而且可以在數學上計算得到。換言之，假如康德大師物自體是一種真實

存在的話，那末幾百年來物體的物自體之謎，似乎是已經解開了。

### 參考文獻

1. 王智益 (王守益)。三個三分鐘的現代佛學。新竹：三季出版社，1995:28
2. Hospers J. An Introduction to Philosophical Analysis. 3rd Ed, Singapore: Prentice-Hall International, Inc., 1988:64
3. 王守益。物理與佛學。第三版，台北：慧炬出版社，1990:56-64
4. Collinson D. Fifty Major Philosophers. New York: Routledge, 1987:91
5. Russell B. History of Western Philosophy. London: George Allen & Unwin Paperbacks, 1946:680-681
6. Eisberg R, Resnick R. Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei and Particles. 2nd Ed., New York: John Wiley & Sons, Inc., 1985: 133-135
7. Ditto P.145.
8. Ellington JW. Immanuel Kant Metaphysical Foundations of Natural Science. Indiana: Hackett Publishing Company, Inc., 1985:xv

## Quantum Mechanical Wave Function and the Thing-in-itself of Kant's

George S. Wang<sup>1</sup> and Hui-chin Wang<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Retired from Department of Physics, National Tsing-Hua University, Hsin-Tsu, Taiwan

<sup>2</sup>Nobel Education Institute, Arcadia, California, USA

The existence of thing-in-itself has been proposed and maintained its obscurity by Immanuel Kant ever since 1770. Listing 7 features of the thing-in-itself of Kant's, we find that the wave function  $\Psi$  of Quantum Mechanics of modern physics possesses all those 7 features and that it is explicitly calculable in mathematical form. Furthermore, in Quantum Mechanics the noumenal  $\Psi$ , its physical property P, and the corresponding mathematical operator  $\hat{p}$  for the physical property P are distinctly defined and expressly related by an equation. We also give detail explanations why a complex wave function cannot be observed.

Our conclusion is that we propose to have found a concrete and distinct mathematical form for the thing-in-itself in the Quantum Mechanics regime, which may serve as the non-sensible noumenal cause for an appearance of a body. As the thing-in-itself is non-sensible and non-observable, it appears that only mathematical form of thing-in-itself is proper and accessible. The philosophical obscurity or mystery on noumenon of an object existing for hundreds of years appears now resolved. (Buddh Sci 2000;1:26-30)

**Keywords:** thing-in-itself; noumenon; ontology; philosophy; Kant; wave function